

STEPANOVA

Олимпиадная математика • 10-11 классы

Авторская тренировочная подборка

12 задач повышенного уровня: теория чисел, комбинаторика, алгебра, графы и доказательства. Подходит как дополнительная тренировка для сильных учеников.

Важно. Это не официальный вариант конкретной олимпиады. Задания составлены как тренировка математического мышления: арифметика, логика, комбинаторика, теория чисел и геометрия.

Задачи

1. Докажите, что для любого целого n число $n^5 - n$ делится на 30.
2. Найдите все пары положительных целых чисел $x \leq y$, для которых $1/x + 1/y = 1/10$.
3. Сколько существует пар положительных целых чисел $x > y$, удовлетворяющих $x^2 - y^2 = 2025$?
4. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ для любых действительных a, b, c .
5. Многочлен $P(x)$ имеет целые коэффициенты. Докажите, что $P(0)$ и $P(2)$ имеют одинаковую чётность.
6. Докажите, что среди любых 11 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 10.
7. Сколько подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 10\}$ имеют чётную сумму элементов?
8. Может ли существовать простой граф на 9 вершинах, в котором степень каждой вершины равна 5?
9. Последовательность задана $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Найдите формулу для a_n и вычислите a_{10} .
10. Найдите все положительные целые решения уравнения $x + y + xy = 2025$.
11. Докажите, что квадрат целого числа не может оканчиваться цифрой 2, 3, 7 или 8.
12. На плоскости отмечены 7 точек, никакие три не лежат на одной прямой. Сколько треугольников с вершинами в этих точках можно построить?

Ответы и идеи решений

1. $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Делимость на 2 и 3 следует из множителя $n(n-1)(n+1)$. Для делимости на 5 достаточно проверить n по модулю 5: по малой теореме Ферма $n^5 \equiv n \pmod{5}$. Так как 2, 3, 5 попарно взаимно просты, выражение делится на 30.
2. $10x + 10y = xy$, значит $(x-10)(y-10) = 100$. Для $x \leq y$ берём положительные пары делителей: 1·100, 2·50, 4·25, 5·20, 10·10. Ответ: (11, 110), (12, 60), (14, 35), (15, 30), (20, 20).
3. $(x-y)(x+y) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Число положительных делителей 2025 равно $(4+1)(2+1) = 15$. Пары взаимодополняющих делителей дают 7 пар с различными множителями и одну центральную 45·45, которая дала бы $y=0$. Значит положительных решений 7.
4. Перенесём правую часть: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$.
5. $P(2) - P(0)$ — сумма всех ненулевых членов $P(2)$, и каждый из них содержит множитель 2. Значит разность чётна, следовательно $P(0)$ и $P(2)$ одной чётности.
6. Остатков по модулю 10 ровно 10. Среди 11 чисел по принципу Дирихле два имеют одинаковый остаток; их разность кратна 10.
7. Всего подмножеств $2^{10} = 1024$. Сопоставим каждому подмножеству S подмножество $S \Delta \{1\}$: наличие числа 1 меняется, поэтому чётность суммы меняется. Подмножества разбиваются на пары «чётная сумма — нечётная сумма». Ответ: 512.
8. Нет. Сумма степеней всех вершин любого графа чётна. Здесь она равнялась бы $9 \cdot 5 = 45$ — нечётное число.
9. Предположим $a_n = 2^n - 1$. Тогда $a_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$; база $a_1 = 1 = 2^1 - 1$. Значит $a_n = 2^n - 1$, а $a_{10} = 1023$.
10. $x + y + xy = 2025 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 2026 = 2 \cdot 1013$, причём 1013 — простое. Для положительных x, y оба множителя > 1 , поэтому получаем только $(x, y) = (1, 1012)$ и $(1012, 1)$.
11. Последняя цифра квадрата определяется последней цифрой числа. Квадраты 0, 1, 2, ..., 9 по модулю 10 дают только 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Цифр 2, 3, 7, 8 среди них нет.
12. Треугольник определяется выбором любых 3 точек; условие «никакие три не лежат на одной прямой» гарантирует, что каждый выбор даёт треугольник. Ответ: $C(7, 3) = 35$.

Материал подготовлен для образовательного проекта STEPANOVA. При размещении вне сайта stepanova-math.ru рекомендуется указывать источник: «STEPANOVA • Маргарита Степанова • stepanova-math.ru».