

STEPANOVA

Олимпиадная математика • 5-6 классы

Авторская тренировочная подборка

12 задач для спокойной самостоятельной работы. Рекомендуемый режим: 15–25 минут на задачу; решение смотреть только после собственной попытки.

Важно. Это не официальный вариант конкретной олимпиады. Задания составлены как тренировка математического мышления: арифметика, логика, комбинаторика, теория чисел и геометрия.

Задачи

1. Три последовательных натуральных числа в сумме дают 72. Найдите эти числа.
2. Двузначное число имеет сумму цифр 11. Если переставить цифры местами, число уменьшится на 27. Найдите исходное число.
3. Сколько натуральных чисел от 1 до 100 делятся на 3, но не делятся на 5?
4. 38 конфет разложили в три коробки. Во второй на 2 конфеты больше, чем в первой, а в третьей вдвое больше, чем в первой. Сколько конфет в каждой коробке?
5. С шахматной доски 8×8 удалили два противоположных угловых квадрата. Можно ли оставшуюся часть полностью покрыть костяшками домино 1×2 без наложений?
6. В ящике лежат носки трёх цветов. Какое наименьшее число носков нужно вынуть вслепую, чтобы среди вынутых гарантированно оказалось 5 носков одного цвета?
7. Периметр прямоугольника равен 34 см, а одна сторона на 5 см длиннее другой. Найдите стороны прямоугольника.
8. На окружности отмечены 10 точек. Каждую пару точек соединили отрезком. Сколько всего отрезков провели?
9. Есть 9 одинаковых на вид монет, одна из них легче остальных. Как найти лёгкую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь?
10. Из левого нижнего угла клетчатого прямоугольника нужно попасть в правый верхний, делая только шаг вправо или шаг вверх. Требуется сделать 3 шага вправо и 2 шага вверх. Сколько существует маршрутов?
11. Найдите натуральное число n , если $1 + 2 + 3 + \dots + n = 78$.
12. Книгу пронумеровали страницами от 1 до 55. Сколько раз в записи номеров страниц встречается цифра 5?

Ответы и идеи решений

1. Пусть среднее число равно x . Тогда $(x-1)+x+(x+1)=72$, то есть $3x=72$. Получаем $x=24$.
Ответ: 23, 24, 25.
2. Пусть десятки — a , единицы — b . Тогда $a+b=11$ и $(10a+b)-(10b+a)=27$, то есть $a-b=3$.
Отсюда $a=7$, $b=4$. Ответ: 74.
3. Кратных 3: $[100/3]=33$. Среди них кратных 15 (то есть одновременно 3 и 5): $[100/15]=6$.
Ответ: $33-6=27$.
4. Пусть в первой x конфет. Тогда $x+(x+2)+2x=38$, откуда $4x=36$ и $x=9$. Ответ: 9, 11 и 18.
5. Нет. Противоположные углы доски одного цвета. После их удаления клеток одного цвета станет на 2 меньше, чем другого, а каждая костяшка домино всегда закрывает одну белую и одну чёрную клетку.
6. Если вынуть 12 носков, теоретически можно получить по 4 каждого цвета. Следующий, 13-й, обязательно даст пятый носок какого-то цвета. Ответ: 13.
7. Пусть стороны a и $a+5$. Тогда $2(a+a+5)=34$, значит $2a+5=17$ и $a=6$. Ответ: 6 см и 11 см.
8. Каждый отрезок задаётся выбором пары точек. Число пар: $10 \cdot 9 / 2 = 45$.
9. Разделить монеты на три группы по 3. Взвесить две группы. Если равны — лёгкая в третьей; если нет — в более лёгкой. Затем из нужной тройки взвесить 1 монету против 1: при равенстве лёгкая третья, иначе — та, чья чашка поднялась.
10. Любой маршрут — это последовательность из 5 шагов, где выбираются места для двух шагов вверх (или трёх вправо). Число способов $C(5,2)=10$.
11. $n(n+1)/2=78$, то есть $n(n+1)=156$. Подходит $12 \cdot 13=156$. Ответ: 12.
12. В разряде единиц цифра 5 встречается в 5, 15, 25, 35, 45, 55 — 6 раз. В разряде десятков — в 50, 51, 52, 53, 54, 55 — ещё 6 раз. В номере 55 учитываются две пятёрки.
Ответ: 12.

Материал подготовлен для образовательного проекта STEPANOVA. При размещении вне сайта stepanova-math.ru рекомендуется указывать источник: «STEPANOVA • Маргарита Степанова • stepanova-math.ru».