

STEPANOVA

Олимпиадная математика • 7–9 классы

Авторская тренировочная подборка

12 задач на идеи, доказательства и поиск структуры. Рекомендуется записывать не только ответ, но и ключевую мысль решения.

Важно. Это не официальный вариант конкретной олимпиады. Задания составлены как тренировка математического мышления: арифметика, логика, комбинаторика, теория чисел и геометрия.

Задачи

1. Найдите все двузначные числа, которые в 4 раза больше суммы своих цифр.
2. Докажите, что для любого целого n число $n^3 - n$ делится на 6.
3. Докажите, что среди любых 6 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.
4. Найдите все пары положительных целых чисел $x \leq y$, для которых $1/x + 1/y = 1/6$.
5. Есть 100 закрытых шкафчиков. Ученик №1 меняет состояние каждого шкафчика, ученик №2 — каждого второго, №3 — каждого третьего и так далее до №100. Какие шкафчики останутся открытыми?
6. С доски 8×8 удалили две клетки одного цвета. Можно ли оставшуюся часть замостить домино 1×2 ?
7. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр $1, 2, \dots, 9$, если цифры в записи должны строго возрастать слева направо?
8. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см. Найдите длину медианы, проведённой из вершины прямого угла.
9. Сколько существует троек положительных целых чисел (a, b, c) , для которых $a + b + c = 12$?
10. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 9.
11. Найдите все пары положительных целых чисел $x > y$, удовлетворяющие $x^2 - y^2 = 45$.
12. Могут ли 7 человек устроить рукопожатия так, чтобы каждый пожал руку ровно трём другим?

Ответы и идеи решений

1. Пусть число $10a+b$. Условие: $10a+b=4(a+b)$, откуда $2a=b$. Цифра $b \leq 9$, поэтому $a=1,2,3,4$.
Ответ: 12, 24, 36, 48.
2. $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ — произведение трёх последовательных целых чисел. Среди них есть чётное и есть число, кратное 3, значит произведение делится на 6.
3. Рассмотрим остатки при делении на 5: их только 5. Шесть чисел по принципу Дирихле дают два с одинаковым остатком; их разность кратна 5.
4. После умножения на $6x$: $6x+6y=xy$. Тогда $(x-6)(y-6)=36$. Положительные пары делителей 36 дают: (7,42), (8,24), (9,18), (10,15), (12,12).
5. Шкафчик № k меняет состояние столько раз, сколько у k делителей. Нечётное число делителей бывает только у полных квадратов. Открыты: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100.
6. Нет. Каждое домино закрывает по одной клетке каждого цвета. После удаления двух клеток одного цвета количества белых и чёрных клеток различны на 2.
7. Выбираем любые 4 цифры из 9; порядок после выбора единственный — возрастающий.
Ответ: $C(9,4)=126$.
8. Середина гипотенузы равноудалена от всех трёх вершин прямоугольного треугольника. Поэтому медиана к гипотенузе равна половине гипотенузы: 5 см.
9. Положительные решения $a+b+c=12$ равносильны неотрицательным $a'+b'+c'=9$ после замены $a'=a-1$ и т. д. Число решений $C(11,2)=55$.
10. Остатков при делении на 9 только 9. Среди 10 чисел найдутся два с одинаковым остатком; разность этих чисел кратна 9.
11. $(x-y)(x+y)=45$. Оба множителя положительные нечётные. Пары делителей: 1·45, 3·15, 5·9. Получаем (23,22), (9,6), (7,2).
12. Нет. Сумма степеней вершин графа рукопожатий должна быть чётной (каждое рукопожатие считается дважды). Здесь сумма была бы $7 \cdot 3=21$, что нечётно.

Материал подготовлен для образовательного проекта STEPANOVA. При размещении вне сайта stepanova-math.ru рекомендуется указывать источник: «STEPANOVA • Маргарита Степанова • stepanova-math.ru».