

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ДВАЖДЫ ДВА - ПЯТЬ!

Алгебраические софизмы

Адаптированная текстовая версия по изданию 1939 года

Правовой статус. Издание 1939 года и его цифровая копия в Internet Archive помечены как Public Domain Mark 1.0. Wikimedia Commons отдельно указывает, что размещённый там файл является механическим сканом произведения общественного достояния и свободен от известных ограничений авторского права. Эта PDF-версия набрана заново для удобного чтения; это не факсимильный скан.

Источники: Internet Archive, identifier 20200311_20200311_1043; Wikimedia Commons, файл «Перельман Я.И. Дважды два - пять! 1939.djvu».

Зачем нужны математические софизмы

Софизм выглядит как правильное рассуждение, но в одном из переходов скрыта ошибка. Такие примеры полезны не ради ложных результатов, а как тренировка внимательности: нужно найти точное место, где нарушено математическое правило.

Ниже сохранены десять основных идей брошюры Перельмана. Формулировки и набор текста осовременены, а после каждого софизма сразу дано объяснение ошибки.

I. « $2 \times 2 = 5$ »

Начинают с верного равенства:

$$144 - 64 = 180 - 100.$$

После переноса и добавления 81 к обеим частям получают:

$$64 - 144 + 81 = 100 - 180 + 81.$$

Обе части представляют как полные квадраты:

$$(8 - 9)^2 = (10 - 9)^2.$$

Затем делают ложный шаг: из равенства квадратов пишут $8 - 9 = 10 - 9$, откуда $8 = 10$, затем $4 = 5$ и, наконец, $2 \times 2 = 5$.

Где ошибка. Ошибка появляется при извлечении квадратного корня. Из $A^2 = B^2$ следует $A = B$ или $A = -B$. Здесь $8 - 9 = -1$, а $10 - 9 = 1$. Квадраты равны, сами числа - нет.

II. « $2 = 3$ »

Пусть $x = 1$, $y = 2$. Тогда $y = 2x$.

К обеим частям прибавим $4x$: $y + 4x = 6x$.

Вычтем $3y$: $4x - 2y = 6x - 3y$.

Вынесем общий множитель: $2(2x - y) = 3(2x - y)$.

Если «сократить» на $(2x - y)$, получится $2 = 3$.

Где ошибка. Но $2x - y = 2 \cdot 1 - 2 = 0$. Сокращение означает деление обеих частей на ноль, а деление на ноль не определено.

III. «3 = 7»

Берут верное равенство $30 - 9 = 70 - 49$ и преобразуют его так, чтобы получить:

$$9 - 30 + 25 = 49 - 70 + 25.$$

После свёртывания квадратов выходит:

$$(3 - 5)^2 = (7 - 5)^2.$$

Далее ошибочно заключают $3 - 5 = 7 - 5$ и получают $3 = 7$.

Где ошибка. Снова потерян знак при извлечении квадратного корня: слева -2 , справа $+2$. Их квадраты равны, но сами числа противоположны.

IV. «2 = 1»

Положим $x = 1$. Тогда $x^2 = x$.

Вычтем 1: $x^2 - 1 = x - 1$.

Разложим: $(x - 1)(x + 1) = x - 1$.

После сокращения на $(x - 1)$ получается $x + 1 = 1$, а при $x = 1$ - равенство $2 = 1$.

Где ошибка. При $x = 1$ множитель $x - 1$ равен нулю. Поэтому сокращать на него нельзя: это скрытое деление на ноль.

V. «3 = 5»

Возьмём $x = 3/2$. Тогда:

$$6x - 9 = 10x - 15.$$

Вынесем множители:

$$3(2x - 3) = 5(2x - 3).$$

Если сократить на $(2x - 3)$, выйдет $3 = 5$.

Где ошибка. Но при $x = 3/2$ выражение $2x - 3$ равно нулю. Снова выполнено запрещённое деление на ноль.

VI. «Как поселить 11 человек в 10 комнатах по одному?»

Кажется, будто можно временно оставить двух человек в первой комнате, затем расселять остальных по комнатам со второй по девятую, а последнего «перевести» в десятую. При быстром счёте создаётся впечатление, что все 11 человек получили отдельную комнату.

Где ошибка. Это словесный софизм. Один из первых двух жильцов фактически нигде отдельно не размещён: в цепочке нумерации одного человека просто пропускают. Десять одноместных комнат не могут вместить одиннадцать человек по одному.

VII. « $8 \times 8 = 65$ »

Квадрат 8×8 разрезают на несколько частей и переставляют так, что внешне получается прямоугольник 5×13 . Площади вроде бы равны, но $8 \times 8 = 64$, а $5 \times 13 = 65$.

Где ошибка. Части не образуют точный прямоугольник: вдоль длинной диагонали возникает очень узкая щель (или наложение). Наклоны соответствующих сторон различаются. Суммарная площадь скрытой щели как раз равна одной квадратной единице.

VIII. « $0 = 1/2 = 1$ »

Рассматривают бесконечный ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

Если обозначить его сумму через S и записать $S = 1 - S$,
получится $S = 1/2$.

Если группировать как $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, получится 0.

Если писать $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$, получится 1.

Где ошибка. Обычная сумма этого ряда не существует: его частичные суммы чередуются 1, 0, 1, 0, Правила перестановки и группировки, допустимые для сходящихся рядов, здесь применять нельзя.

IX. «Все числа равны друг другу»

Пусть $a > b$ и $c = a - b$, то есть $a = b + c$.

После нескольких алгебраических преобразований получают:

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Сокращение общего множителя будто бы даёт $a = b$.

Где ошибка. Но из определения $c = a - b$ следует $a - b - c = 0$.

Общий множитель, который «сократили», равен нулю. Это опять деление на ноль.

X. «Положительное число меньше нуля»

Пусть $a > b > 0$. Тогда $b - a < 0$.

Если умножить неравенство $a > b$ на отрицательное число $(b - a)$, но по ошибке сохранить прежний знак, дальнейшие преобразования могут привести к абсурду вроде $0 > (a - b)^2$.

Где ошибка. При умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства обязательно меняется на противоположный.

Памятка: где обычно прячется ошибка

1. Деление или сокращение на выражение, которое равно нулю.
2. Потеря знака при извлечении квадратного корня.
3. Неправильное обращение с бесконечными рядами.
4. Сохранение знака неравенства после умножения на отрицательное число.
5. Геометрическая схема, где части лишь кажутся точно совпадающими.

Для библиотеки STEPANOVA. Автор оригинального произведения - Яков Исидорович Перельман (1882-1942). Исходное издание: Ленинград, 1939. Правовой статус цифровых источников проверен по Internet Archive и Wikimedia Commons.

Internet Archive: https://archive.org/details/20200311_20200311_1043

Wikimedia Commons:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Перельман_Я.И._Дважды_два_-_пять!_1939.djvu